Successioni di funzioni

Successioni di funzioni: convergenza puntuale

Definizione

Sia I un insieme di numeri reali e sia $\{f_n\}$ *una successione di funzioni reali definite in* I, $f_n : I \to R$, $I \subseteq R$.

Si dice che f_n *converge puntualmente in I verso la funzione* $f : I \to R$, *se risulta*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in I;$$

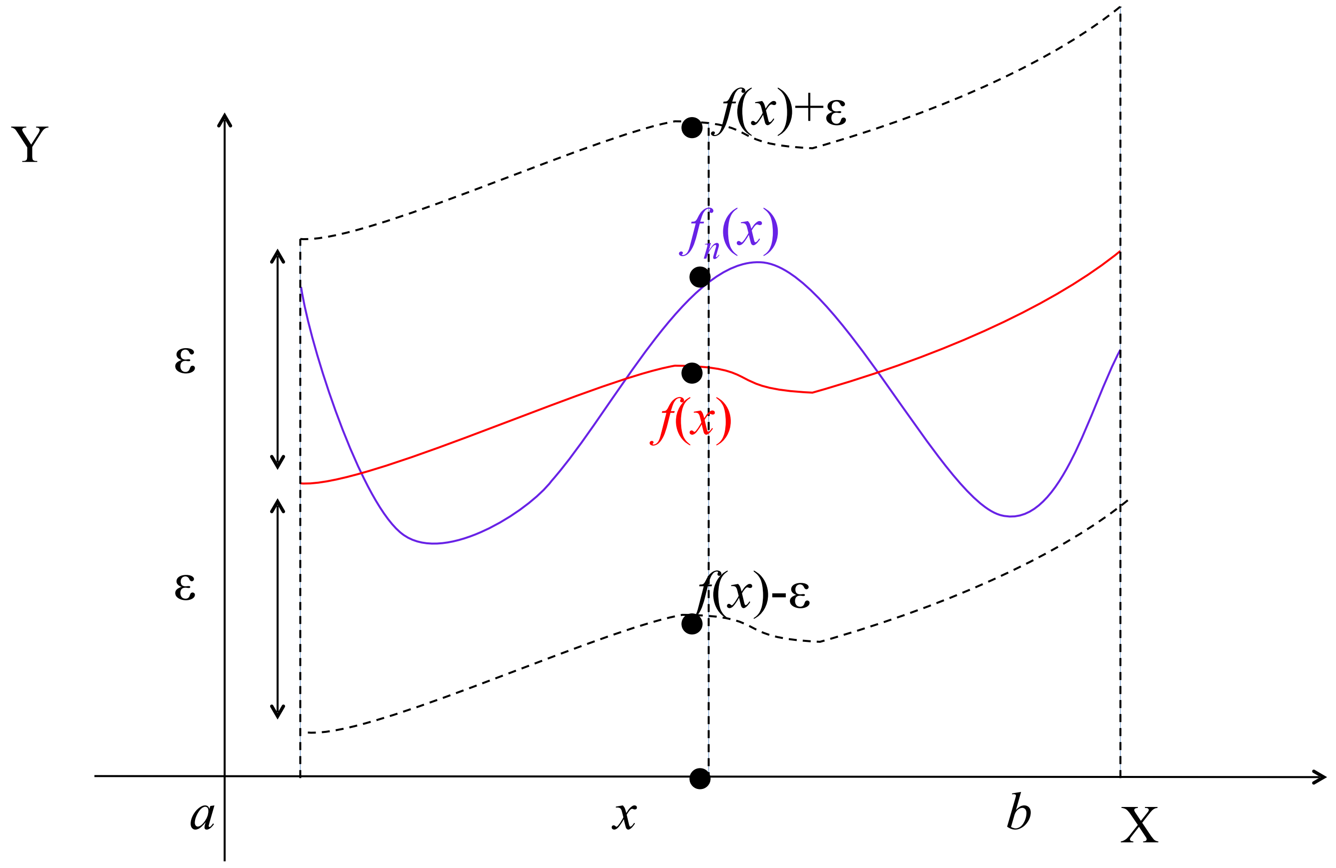
Cioè se

$$\forall \varepsilon > 0 \; e \; \forall x \in I \qquad \exists \nu_{\varepsilon,x} \in R :$$

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \qquad \forall n > \nu_{\varepsilon,x}$$

Successioni di funzioni: convergenza puntuale

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu_{\varepsilon, x}$$



Successioni di funzioni:convergenza puntuale

Per stabilire la convergenza puntuale si fissa $x \in I$ *e si considera la successione numerica* $\{f_n(x)\}$

Esempio

Dire se converge la successione $f_n(x) = \dfrac{n^2}{1+n^2x^2}$ $\quad x \in (0,1]$

Si ha

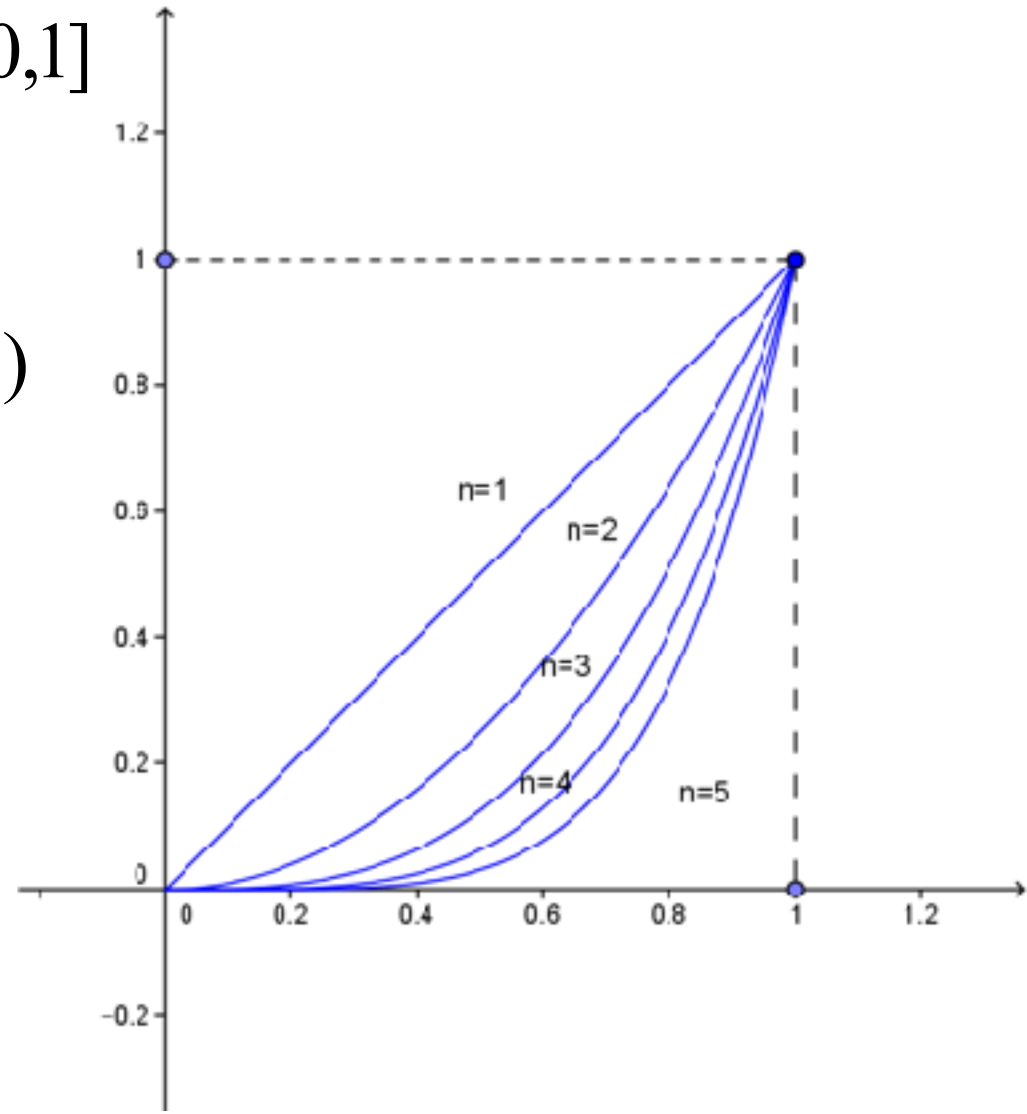
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+x^2} = \frac{1}{x^2}$$

Successioni di funzioni

Esempio $f_n(x) = x^n \qquad x \in [0,1]$

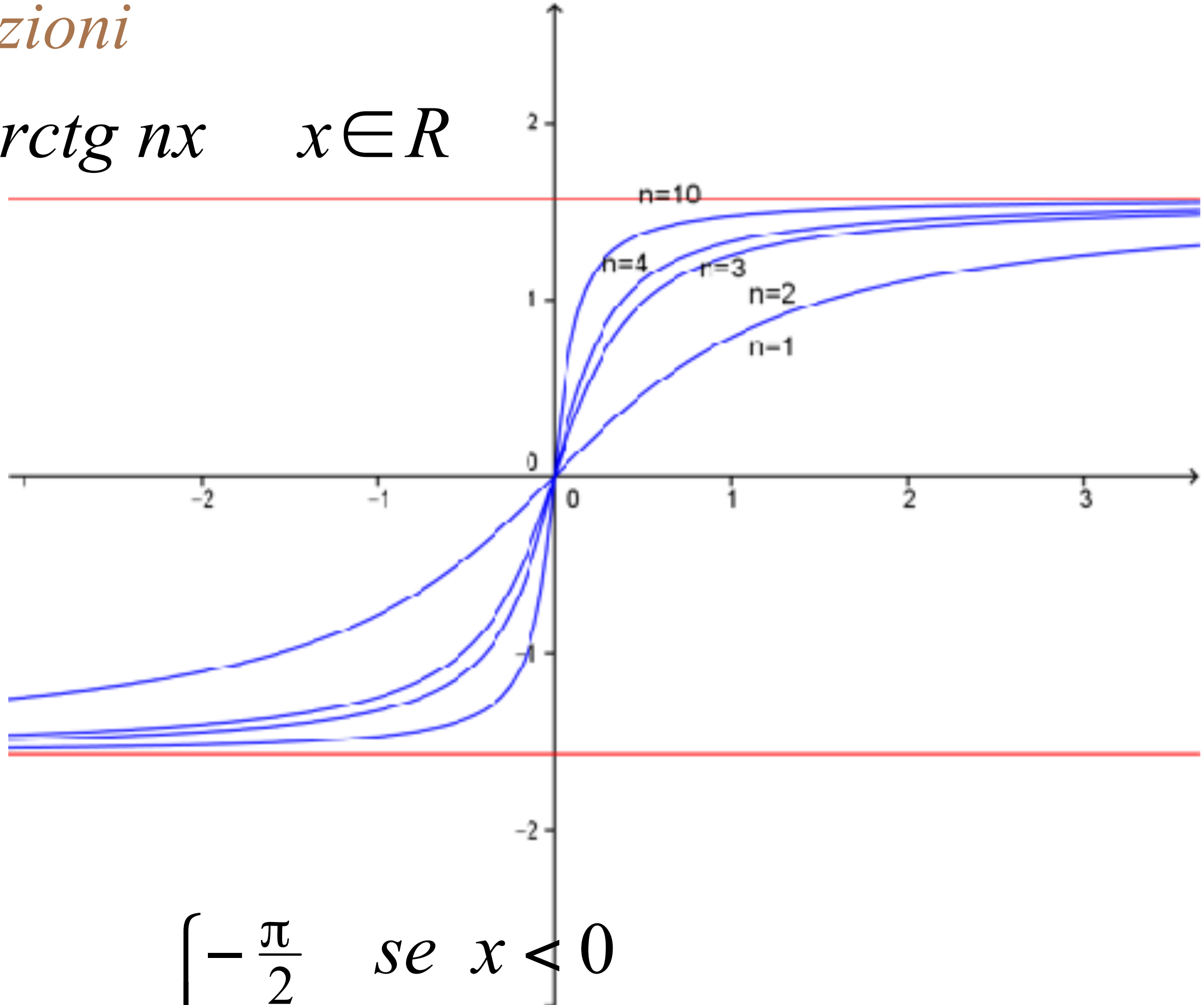
$$\lim_{n \to +\infty} x^n = 0 \qquad se \;\; x \in [0,1)$$

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = 1 \qquad se \;\; x = 1$$



Successioni di funzioni

Esempio $f_n(x) = arctg\; nx \qquad x \in R$



$$\lim_{n \to +\infty} arctgnx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & se \;\; x < 0 \\ 0 & se \;\; x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & se \;\; x > 0 \end{cases}$$

Successioni di funzioni

In generale, fissato $\varepsilon > 0$, *il numero* $\nu_{\varepsilon,x}$ *dipende dal punto x; se invece* $\nu_{\varepsilon,x}$ *non dipende da x allora si parla di* *convergenza uniforme*:

Definizione

$\{f_n(x)\}$ *converge uniformemente in I verso f(x)* se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in R \;\; (\nu_\varepsilon \textit{ non dipende da } x) \quad \textit{tale che}$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu_\varepsilon, \quad \forall x \in I$$

Successioni di funzioni

$$\textit{convergenza uniforme} \Rightarrow \textit{convergenza puntuale}$$

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, *se* ν_ε *è tale che*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall n > \nu_\varepsilon \,,$$

allora per ogni $\forall x \in I$ *si può scegliere* $\nu_{\varepsilon,x} = \nu_\varepsilon$ *e quindi la diseguaglianza vale anche* $\forall n > \nu_{\varepsilon,x} = \nu_\varepsilon$.

Il viceversa in generale non vale.

Successioni di funzioni

Se le f_n, f *sono limitate in* I *allora* $\{f_n(x)\}$ *converge uniformemente ad* f *in* I *se e solo se*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 0$$

Esercizio.

Dimostrare che la successione $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ *converge uniformemente in* $[0,1]$

Fissato x *in* $[0,1]$ *si ha* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{1+nx} = 0$

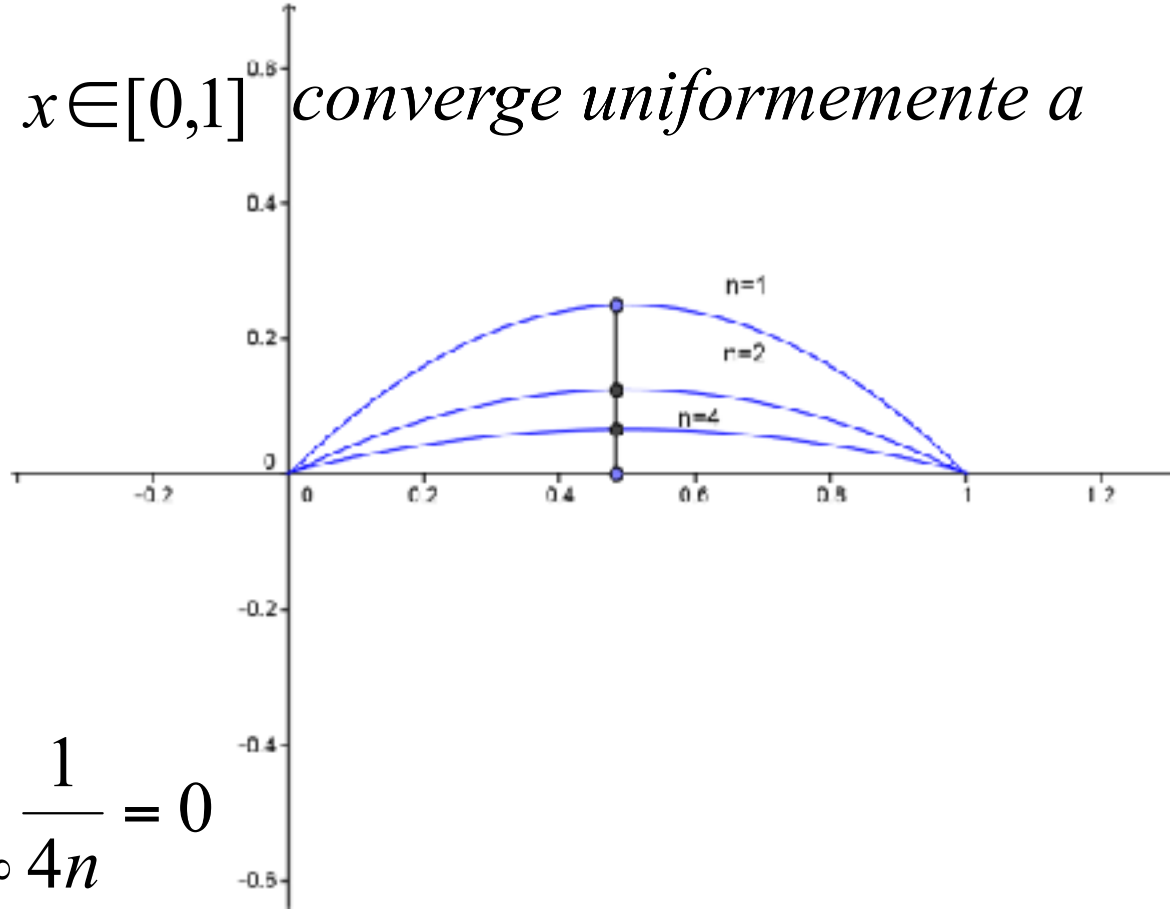
Successioni di funzioni, convergenza uniforme

Vediamo se la convergenza è uniforme

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{[0,1]} \left| \frac{x}{1+nx} - 0 \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+n} = 0$$

Quindi $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ *converge uniformemente a* $f(x)=0$

Esempio $f_n(x) = \dfrac{x - x^2}{n}$, $x \in [0,1]$ *converge uniformemente a zero.*



Infatti

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x - x^2}{n} = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{[0,1]} \left| \frac{x - x^2}{n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4n} = 0$$

Teorema (continuità del limite uniforme di funzioni continue)

Se $\left\{f_n(x)\right\}$ *converge uniformemente in I verso* $f(x)$*, e tutte le* $f_n(x)$ *sono continue in* x_0*, allora anche* $f(x)$ *è continua in* x_0.

In generale la convergenza puntuale di una successioni di funzioni continue non assicura la continuità della funzione limite

Successioni di funzioni

Esempio $f_n(x) = arctg\, nx \qquad x \in R$

$$\lim_{n \to +\infty} arctgnx = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & se \;\; x < 0 \\ 0 & se \;\; x = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & se \;\; x > 0 \end{cases}$$

La convergenza non può essere uniforme in quanto la funzione limite non è continua

Serie di funzioni

Serie di funzioni

Sia $\{f_n\}$ *una successione di funzioni reali definite in* $I \subseteq R$.

Se $\forall x \in I$ $(x$ *fissato*$)$ *la serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots\ldots$$

è convergente, cioè se la successione delle somme parziali

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

converge puntualmente in I, allora si dice che la serie di

funzioni $$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f_1 + f_2 + \ldots\ldots$$

è convergente puntualmente in I.

Serie di funzioni

Definizione (convergenza totale)

Se esistono dei numeri reali $M_n \geq 0$ *tali che*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad x \in I, \quad n \in N$$

e se la serie numerica $\sum M_n$ *è convergente in I, allora si dice che* $\sum f_n$ *converge totalmente in I.*

Teorema

La convergenza totale di una serie di funzioni implica quella uniforme:

$$\text{convergenza totale} \quad \Rightarrow \quad \text{convergenza uniforme}$$

Serie di funzioni

Definizione (convergenza uniforme)

La serie $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente in I verso* $S(x)$ *se la successione delle somme parziali* $\{S_n(x)\}$ *converge uniformemente in I verso* $S(x)$.

Teorema

La somma di una serie di funzioni continue convergente uniformemente è anch'essa continua.

(discende dal teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue)

Serie di funzioni

Esercizio

Dire se converge puntualmente $\forall x \in R$ *la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

Si ha $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge (serie armonica generalizzata)*

$$\Rightarrow \sum \frac{\cos nx}{n^2}$$ *converge totalmente*

$\Rightarrow$ *converge uniformemente* $\Rightarrow$ *converge puntualmente*

Serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x^2)^n$$

Serie geometrica

$$S_n(x) = \frac{1-[q(x)]^{n+1}}{1-[q(x)]} = \frac{1-(1-x^2)^{n+1}}{x^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(1-x^2)^{n+1}}{x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x \neq 0,\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ \infty & x = 0 \\ indeterminata & x \geq \sqrt{2},\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$

Serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x^2)^n$$

Serie geometrica

Converge solo puntualmente a $S(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\ x\neq 0$
perché S non è continua in I

Converge uniformemente in ogni intervallo del tipo

$$[a,b]\subset\left(0,\sqrt{2}\right)\ o\ [a,b]\subset\left(-\sqrt{2},0\right)$$

Serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$ *Serie telescopica*

Si ha $S_n(x) = f_0(x) - f_{n+1}(x) = x - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

- *converge con somma* $S = \lim_{n=+\infty} S_n = x, \qquad |x| \le 1$

- *diverge se* $x > 1$

- *oscilla se* $x < -1$

Teorema di integrazione per serie (termine a termine)

Sia $\{f_n\}$ *una successione di funzioni continue in* $[a,b]$, *se la serie* $\sum f_n(x)$ *è convergente uniformemente in* $[a,b]$ *verso* $S(x)$ *allora*

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum f_n(x)\right)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx$$

Esercizio

Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^n}$ *è integrabile termine a termine in* $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

Teorema di derivazione per serie (termine a termine)

Sia $\{f_n\}$ *una successione di funzioni derivabili in* (a,b) *con derivata continua in* $[a,b]$. *Se*

i) $\sum f_n(x)$ *converge almeno in un punto* $x_0 \in [a,b]$

ii) $\sum f_n'(x)$ *converge uniformemente in* $[a,b]$ con somma $A(x)$

allora anche $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente in* $[a,b]$ *e se* $S(x)$ *è la sua somma , si ha*

$$S'(x) = \left(\sum f_n(x) \right)' = \sum f_n'(x) = \mathrm{A(x)} \qquad \forall x \in [a,b]$$

Esercizio

Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *è derivabile termine a termine*

Serie di potenze

Sia $\{a_n\}$ *una successione di numeri reali, si chiama serie di potenze di punto iniziale zero, la serie di funzioni:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *Sono i coefficienti.*

L'intervallo I in cui tale serie converge si chiama intervallo di convergenza. Il raggio di convergenza è l'estremo superiore r *di tale intervallo*

Serie di potenze

Si possono avere 3 casi:

1) $r = 0$ *allora la serie di potenze* $\sum a_n x^n$ *converge solo in* $x = 0$

2) $0 < r < +\infty$ *allora* $\sum a_n x^n$

e totalmente e dunque assolutamente

in ogni $[-\delta, \delta] \subset (-r, r)$

non converge per $|x| > r$

3) $r = +\infty$ *allora* $\sum a_n x^n$

converge in ogni $x \in R$

e totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato

di R: $[-\delta, \delta] \subset R$

Serie di potenze

Teorema di Cauchy

Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

se $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$

allora $r = \frac{1}{l}$ (Se $l=0 \Rightarrow r = +\infty$)

Serie di potenze

Teorema di D'Alembert

Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *se* $a_n \neq 0 \quad \forall n,$

e se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$

allora $r = \frac{1}{l}$ (Se $l=0 \Rightarrow r = +\infty$)

Teorema: raggio di convergenza della serie derivata

Una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della sua serie derivata.

Dimostrazione: data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad a_n \neq 0 \qquad \forall n,$

Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ *si ha*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

e quindi per il criterio di D'Alembert la serie di potenze e la sua derivata hanno lo stesso raggio di convergenza

Serie di potenze

Teorema: derivazione e integrazione della serie di potenze

Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *ha raggio di convergenza non nullo e se* $f(x)$ *è la sua somma, cioè*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad \forall |x| < \rho, \text{con } \rho > 0,$$

Allora anche f è derivabile e si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad \forall |x| < \rho,$$

e quindi per il criterio di D'Alembert la serie di potenze e la sua derivata hanno lo stesso raggio di convergenza

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad \forall |x| < \rho,$$

Serie di potenze

Esercizio

Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5n}{2^n} x^n$$

Si trova r=2, quindi I=(-2, 2)

Serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2} \qquad di\ centro\ x_0 = -1$$

Si trova $r = 1$ *quindi* $I = (-2,0)$

Serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} x^n$$

Si trova $r = +\infty$ *quindi* $I = R$

Serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)2^n}$$

Si trova $r = 2$ *quindi* $I = (-1,3)$

Serie di funzioni

Esercizio

Determinare per quali valori di x converge la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^n+\frac{1}{x^n}\right]$$

Separo in due serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^n}$$

Sono due serie geometriche, una di ragione $\frac{x}{2}$ *e l'altra di ragione* $\frac{1}{x}$

Esercizio

Determinare per quali valori di x converge la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n}$$

F*issando x si ha una sere numerica e converge per x<0. Si può trovare questo risultato utilizzando uno dei criteri sufficienti (per esempio quello della radice) studiati per le serie numeriche.*

Se x=0 *si ha una serie armonica divergente. Se x>0 la serie data non soddisfa la condizione necessaria di convergenza .*

Esercizio

Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} sin^n x \, cos^n x$$

Esercizio

Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[e^{nx} - \mathrm{e}^{(n+1)x} \right]$$