Compito del 17/11/12

Utilizzando il criterio del confronto per le serie numeriche dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$$

converge.

Svolgimento.

Il criterio del confronto afferma che:
considerate due successioni a_n, b_n tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{per ogni } n,$$

si ha

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_n < +\infty \implies \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty \implies \sum_{k=1}^{+\infty} b_k = +\infty$

Nel nostro caso vogliamo dimostrare che la serie data converge quindi dobbiamo "trovare" una successione b_n che sia il termine generale di una serie maggiorante convergente.

Si ha : $\displaystyle 0 < \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}$

in quanto la successione $\operatorname{arctg} n < \frac{\pi}{2}$ $\forall n$.

(si ricordi il comportamento della funzione
$f(x) = \operatorname{arctg} x$)

la successione $\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n^2} = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{n^2}$.

è il termine generale della serie numerica

$$\frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

la quale converge perché del tipo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{con } p>1$$

(serie armonica generalizzata convergente)

Allora per il criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2} \quad \text{converge.}$$