Outline

- Serie numeriche, definizione
- Serie geometrica
- Serie telescopica
- Serie armonica
- Condizione necessaria di convergenza
- Serie numeriche a termini non negativi, criteri sufficienti di convergenza: criterio del confronto
- Criterio del confronto asintotico
- Criterio della radice
- Criterio del rapporto
- Serie a termini di segno variabile
- Criterio di Leibniz

Serie numeriche

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathcal{N}}$, una successione a valori reali.

Si dice serie di termine generale a_n: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, la successione delle somme parziali (o ridotte)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_0, \\
S_1 &= a_0 + a_1, \\
S_2 &= a_0 + a_1 + a_2, \\
&\vdots \\
S_n &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

Definizione

La serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente con somma S se

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S, \quad \textit{finito};$$

la serie si dice divergente se $\lim_{n \to +\infty} S_n = \infty$;

la serie si dice indeterminata (oscillante) se $\lim_{n \to +\infty} S_n = \textit{non esiste}$

Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n, \quad \textit{Serie geometrica di ragione } q$$

- converge se $|q| < 1$ e ha per somma $S = \frac{1}{1-q}$,
- diverge se $q \geq 1$,
- oscilla se $q \leq -1$.

Se $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n$ e $|q| < 1$ allora $S = q^{n_0} \frac{1}{1-q}$,

q^{n_0} = primo termine della serie geometrica.

Serie geometrica

Infatti se $q \neq 1$, si ha $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$

(se $q = 1$ allora $S_n = n + 1 \to +\infty$ e la serie diverge)

moltiplicando membro a membro per $1 - q$ $(\neq 0)$ si ottiene

$S_n(1 - q) = (1 + q + q^2 + \cdots + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}$

da cui $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

e passando al limite

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \textit{se } |q| < 1 \\ +\infty & \textit{se } q \geq 1 \\ \textit{irregolare} & \textit{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Serie telescopica

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}) \quad \textit{Serie telescopica}$$

Si ha $S_n = b_0 - b_{n+1}$

- converge con somma $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1}$ se $\lim_{n\to+\infty} b_{n+1}$ é finito,

- diverge se $\lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = +\infty$

- oscilla se $\lim_{n\to+\infty} b_{n+1}$ non esiste

Serie di Mengoli

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \textit{Serie di Mengoli}(\textit{particolare serie telescopica})$$

Si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

La serie di Mengoli converge con somma $S = 1$.

Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$ *Serie armonica generalizzata*

$\Big($ Se $\alpha = 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ Serie armonica $\Big)$

- converge se $\alpha > 1$,
- diverge se $\alpha \leq 1$

Esercizio

Dire se convergono e, se possibile, determinare la somma delle seguenti serie

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$

$q = \frac{1}{3} < 1 \quad \rightarrow \quad S = \frac{q^{n_0}}{1-q} = \frac{(\frac{1}{3})^2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}}\right)$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e^k} - \frac{1}{e^{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{e^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{e^{n+1}} = 1$$

Serie numeriche, condizione necessaria di convergenza

Teorema

Condizione necessaria affinché $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converga é che il limite del termine generale tenda a zero:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

(la serie puó convergere o divergere, non é indeterminata)

Nota Le serie $\sum a_n$, a termini non negativi ($a_n \geq 0$) puó solo convergere o divergere (non puó essere indeterminata).
Infatti la successione dele somme parziali essendo costruita con termini non negativi, é una successione crescente:

$S_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} \geq S_n$.

Dal teorema del limite di una successione monotona si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} = \sup_{n\in\mathcal{N}}\{S_n\}$$

Serie numeriche a termini non negativi, criteri sufficienti di convergenza

Criterio del confronto

Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini non negativi e tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \textit{definitivamente}$$

allora

- se $\sum b_n$ converge, converge anche la serie $\sum a_n$,
- se $\sum a_n$ diverge, diverge anche la serie $\sum b_n$.

La serie $\sum b_n$ é detta maggiorante, la serie $\sum a_n$ é detta minorante.

Dimostrazione

Dimostrazione

Siano

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad e \quad S_n^* = \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

per ipotesi $0 \leq a_n \leq b_n$
e passando alle somme parziali si ha: $0 \leq S_n \leq S_n^*$.

Le serie date sono a termini non negativi e perciò non possono essere indeterminate.

Si ottiene così la tesi.

Esercizi

Dire se convergono le seguenti serie

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{2}{n^4}$$
2. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n^3}{n^3}$$

condizioni sufficienti, criterio del confronto asintotico

Confronto asintotico

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni asintotiche $a_n \sim b_n$ cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento (entrambe convergenti oppure entrambe divergenti).

Dimostrazione

Supponiamo che $a_n \sim b_n$, allora per definizione di limite di successione:

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon \; : \; 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon$ cioè

$(1 - \varepsilon) b_n < a_n < (1 + \varepsilon) b_n.$

Applicando il teorema del confronto si ha la tesi.

Esercizi

Dire se convergono le seguenti serie

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \sin n}{1 + n^3}$$
2. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

condizioni sufficienti, criterio della radice

criterio della radice Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

allora:

- se $l < 1, \quad \Rightarrow \sum a_n$ converge,
- se $l > 1, \quad \Rightarrow \sum a_n$ diverge,
- se $l = 1, \quad \Rightarrow$ il criterio é inefficace.

Dimostrazione

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} = l < 1.$

e sia $\varepsilon > 0$ tale che $l + \varepsilon < 1.$

Per definizione di limite di successione si ha

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon : \quad \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon,$

cioé $a_n < (l + \varepsilon)^n, \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$

Per il criterio del confronto, la serie $\sum a_n$ converge in quanto converge la serie geometrica $\sum (l + \varepsilon)^n$.

Se invece $l > 1$ allora $\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad a_n > 1$ e perciò non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza e la serie $\sum a_n$ diverge (essendo a termini non negativi)

Esercizi

Dire se convergono le seguenti serie

1. $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{2^n}$$
2. $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$$

condizioni sufficienti, criterio del rapporto

criterio del rapporto

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

allora

- se $l < 1, \quad \Rightarrow \sum a_n$ converge,

- se $l > 1, \quad \Rightarrow \sum a_n$ diverge,

- se $l = 1, \quad \Rightarrow$ il criterio é inefficace.

condizioni sufficienti, criterio del rapporto

Dimostrazione Supponiamo che $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1.$

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $l + \varepsilon < 1$

Per definizione di limite di successione si ha

$\forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon \ : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon = x.$

Allora si ha (possiamo supporre $\nu_\varepsilon = 1$)

$a_2 < a_1 x, \quad a_3 < a_1 x^2, \ \ldots, \ a_n < a_1 x^{n-1}.$

Per il criterio del confronto la serie $\sum a_n$ converge in quanto converge la serie geometrica di termine generale $x = l + \varepsilon < 1.$

Se $l > 1$, allora dalla definizione di limite di successione si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ da un certo indice ν in poi.

Allora la successione a_n è strettamente crescente e non può convergere a zero. La condizione necessaria per la convergenza non è soddisfatta.

Serie a termini di segno variabile

Definizione

Sia $\{a_n\}$ una successione di segno variabile,
la serie $\sum a_n$ si dice assolutamente convergente se converge la serie (a termini non negativi) $\sum |a_n|$.

Teorema
Se la serie $\sum a_n$ converge assolutamente allora converge.

CONVERGENZA ASSOLUTA $\Rightarrow$ CONVERGENZA ORDINARIA (o CONVERGENZA SEMPLICE).
non è vero il viceversa

Esempio
La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ non converge assolutamente.
Si dimostra che però converge semplicemente (col Criterio di Leibniz).

Serie a termini di segno alterno, criterio di Leibniz

Criterio di Leibniz

Data la serie di segno alterno $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0, \ \ \forall n$,

Se:

i) la successione $\{a_n\}$ è decrescente;

ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

allora la serie è convergente.

criterio di Leibniz

Inoltre, le somme parziali di indice pari approssimano la somma per eccesso, quelle di indice dispari per difetto. Il resto della serie è maggiorato, in valore assoluto, dal primo termine trascurato.

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \downarrow \ S; \quad S \ = \ \textit{somma della serie}$$

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \uparrow \ S;$$

$$|R_n| = |\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k| \leq a_n, \quad S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}.$$

Esercizio
Utilizzando il criterio di Leibniz, dire se le serie convergono.

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!},$$
2. $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n},$$
3. $$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-n},$$
4. $$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$